Modèle de Solow

Exercice 1

Montrez que la fonction de production de type Cobb-Douglas satisfait les conditions d'une fonction néoclassique.

Solution

Les propriétés d'une fonction de prodcution néoclassique sont les suivantes:

- Homogène de degré 1.
- Est croissante dans les facteurs de production.
- Montre des rendements décroissants.
- Satisfait les conditions d'Inada.

Ainsi, si la fonction de production est $F\left[K,L\right] = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, l'application directe de la définition d'homogénéité de premier degré nous donne:

$$F[\lambda K, \lambda L] = (\lambda K)^{\alpha}\left(\lambda L\right)^{1-\alpha} = \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda F[K,L].$$

La fonction est aussi croissante dans les facteurs de production.

$$\frac{\partial F[K,L]}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} > 0.$$

$$\frac{\partial F[K,L]}{\partial L} = (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha} > 0.$$

Les facteurs montrent des rendements décroissants.

$$\frac{\partial^2 F[K,L]}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1) K^{\alpha-2} L^{1-\alpha} < 0.$$

$$\frac{\partial^2 F[K,L]}{\partial K^L} = (1-\alpha)(-\alpha) K^{\alpha} L^{-\alpha-1} < 0.$$

Finalement, les conditions d'Inada sont les respectées:

$$\lim_{K\to 0} F'_K = \lim_{L\to 0} \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \infty$$

$$\lim_{L\to 0} F'_L = \lim_{L\to 0}(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = \infty$$
$$\lim_{K\to \infty} F'_K = \lim_{L\to \infty} \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = 0$$
$$\lim_{L\to \infty} F'_L = \lim_{L\to \infty}(1-\alpha)K^\alpha L^{-\alpha} = 0$$

Exercice 2

Montrez que, si les facteurs de production (travail et capital) sont rémunérés à leur taux marginal, la rémunération totale épuise la production. C'est-à-dire, montrez que $wL + rK = Y = F(K, L)$.

Solution

En un premier temps, on peut se contenter d'évoquer le théorème d'Euler à propos des fonctions homogènes. Il dit que, si $F(K, L)$ est une fonction homogène, alors $F'_K K + F'_L L = \lambda F(K, L)$. Comme la fonction de production est homogène de premier degré, $\lambda = 1$ et on retrouve ce qu'on cherche:

$$\overbrace{F'_K}^{r} K + \overbrace{F'_L}^{w} L = F(K, L).$$

Ainsi, les rémunérations totales épuisent la production.

Il est possible de montrer cela d'une autre manière en partant de $wL + rK$ et utilisant les valeurs $w = f(k) - f'(k)k$ et $r = f'(k)$. En effet, si l'on divise $wL + rK$ de L, on obtient $w + rk = f(k) - f'(k)k + f'(k)k = f(k)$. Pour tant, comme $F(K, L) = Lf(k)$, on a $Lf(k) = wL + rK$.

Exercice 3

Le modèle de Solow avec Cobb-Douglas. Avec une fonction de production de type Cobb-Douglas où $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, montrez que:

1. La fonction d'accumulation de capital suit $\dot{k} = sk^\alpha - (n+\delta)k$.
2. L'économie a deux états stationnaires: $k_0^\star = 0$ et $k_1^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.
3. L'économie ne converge pas vers le premier état stationnarie mais elle converge vers le deuxième.

Solution

3.1. Pour dériver la fonction d'accumulation du capital en termes intensifs, il est nécessaire d'exprimer la production en termes intensifs. Ainsi:

$$y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{1}{L} K^\alpha L^{1-\alpha} = k^\alpha.$$

Le capital total s'accumule selon $\dot{K} = sF(K, L) - \delta K$. Pour tant

$$\left(\frac{\dot{K}}{L} \right) = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = \frac{sK^\alpha L^{1-\alpha} - \delta K}{L} - nk = sk^\alpha - (n + \delta)k.$$

3.2. L'état stationnaire est la valeur k telle que $\dot{k} = 0$. Pour tant: $\dot{k} = 0 \implies sk^\alpha = (n + \delta)k \implies k_0^\star = 0$ ou $k_1^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

3.3. Nous pouvons montrer la convergence vers chaque état stationnaire comme suit: Prenons le premier, $k_0^\star = 0$. Quand k est proche de cette valeur, $\dot{k}$ prends des valeurs importantes:

- Avec le diagramme de phase ci-dessous, on voit que quand k est positive et proche de 0, $\dot{k} > 0$. Comme k est proche de 0, la productivité du capital est important et, pour tant, une petite augmentation de celui-ci augmente beaucoup la production (car $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$). De l'autre coté, $(n + \delta)k$ ne va pas beaucoup augmenter car le terme est linéaire en k.

- Selon le théorème de Hartman-Grobman $\frac{\partial \dot{k}}{k} = s\alpha \frac{1}{k^{1-\alpha}} - (n + \delta)$. Si l'on évalue la dérivée à $k = 0$, on obtient $+\infty$, et pour tant, on s'éloigne de cet état stationnaire.

- En conclusion, $\dot{k} > 0$ quand k est proche de 0. Ainsi, si une économie commence avec peu de capital, elle va en accumuler.

3.4. Le deuxième état stationnaire $k_1^\star = \frac{s}{n+\delta}^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

- Avec le diagramme de phase, si on bouge à droite de l'état stationnaire on a $\dot{k} < 0$. Ceci est causé parce qu'augmenter le capital génére plus de production, mais d'une manière décroissante (rendements marginaux décroissants). Par contre, la dépréciation est linéaire en k et affecte de capital de la même manière indépendamment de son niveau. Pour tant, on ajoute une petite augmentation de la production, qui va se traduire par une petite augmentation de l'épargne mais on perd plus à cause de la dépréciation. L'effet total est donc une diminution du capital $\dot{k} < 0$. Pour tant, si on passe au-delà de l'état stationnaire, on perd du capital et donc on y revient. Le même analyse peu se faire quand k est légèrement inférieur à $k_1^\star$.

- Selon le théorème de Hartman-Grobman $\frac{\partial \dot{k}}{k} = s\frac{1}{k^{1-\alpha}} - (n+\delta)$. Si l'on évalue la dérivée à $k = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, on obtient $(\alpha - 1)(n+\delta) < 0$. Pour tant, au tour de l'état stationnaire, on s'y approche.
- En conclusion, quand on est proche de $k_1^\star$, si l'économie a un niveau de capital légèrement inférieur, elle va en accumuler. Et au contraire, si l'économie a un niveau de capital légèrement supérieur, elle va en perdre. Pour tant, l'économie converge vers l'état stationnaire $k_1^\star$.

Exercice 4

Les paramètres dans le modèle de Solow. Imaginez que, suit à une décision politique, les ménages épargnent davantage. Si on suppose qu'avant le changement l'économie était à son état stationnaire, quelles sont les conséquences de l'augmentation du taux d'épargne? Expliquez les effets sur le capital par tête et la consommation par tête à court à long terme. Pour simplifier, imaginez que la technologie ne s'améliore pas.

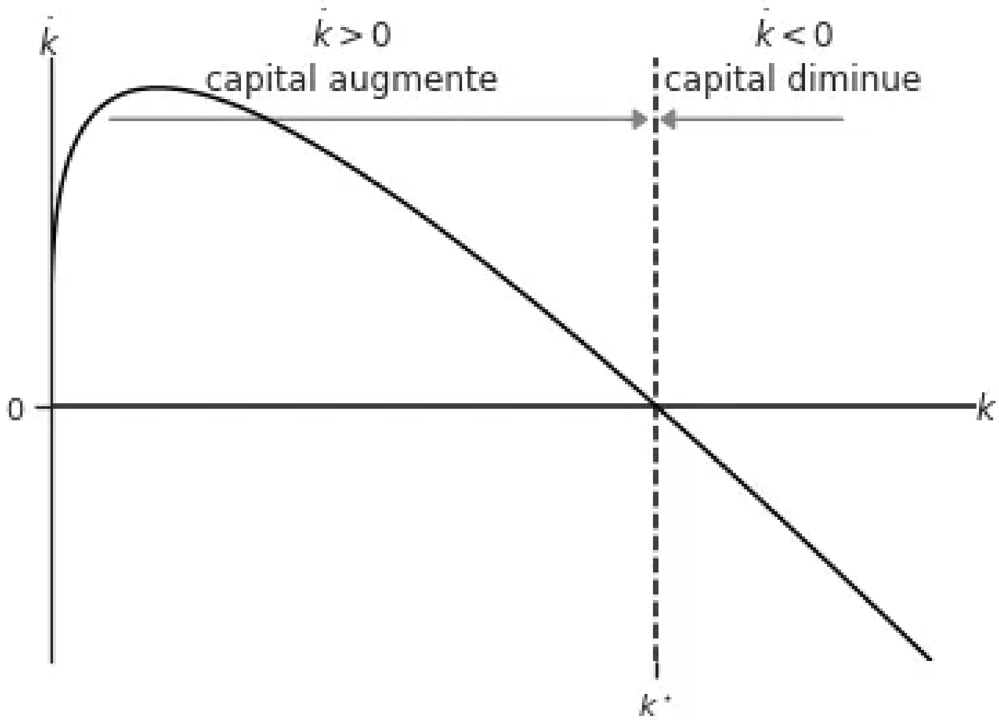
Solution

Suite au changement, l'économie accumule davantage de capital. En effet, à l'état stationnaire (situation initiale) on avait que

$$\dot{k}_0 = sf(k_0) - (n+\delta)k_0 = 0.$$

Si s augmente, $\dot{k} > 0$ car

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial s} = f(k_0) > 0$$


$\dot{k}$
$\dot{k} > 0$
capital augmente
$\dot{k} < 0$
capital diminue
0
k
k^*

et le capital par tête s'accumule. La consommation à l'état stationnaire était donnée par $c = (1-s)f(k)$. Avec l'augmentation de s, la consommation diminue.

À long terme, un nouvel état stationnaire est achevé. Ceci montrera un niveau de capital par tête plus élevé car le niveau de capital stationnaire est défini par $\frac{f(k)}{k} = \frac{n+\delta}{s}$. Ainsi, si s augmente la partie droite diminue, et pour tant, la partie gauche doit diminuer aussi. Le comportement de la partie gauche est donné par

$$\frac{\partial \frac{f(k)}{k}}{\partial k} = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{w}{k^2} < 0/$$

Pour tant, comme la partie gauche doit diminuer, il faut que $k^\star$ augmente.

Manière alternative de montrer que $k^\star$ augmente. *

La valeur $k^\star$ est donnée par l'équation implicite:

$$sf(k^\star) - (n+\delta)k^\star = 0.$$

Nous pouvons calculer comment la valeur $k^\star$ doive changer pour garder l'égalité quand s augmente. Il s'agit de différencier l'équation par rapport à s et à k.

$$f(k^\star)\mathrm{d}s + sf'(k^\star)\mathrm{d}k - (n+\delta)\mathrm{d}s = 0$$

Pour tant,

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)}{sf'(k^\star) - (n+\delta)}.$$

On sait, en plus, qu'il s'agit d'un état stationnaire, ce qui implique que $sf(k^\star) = (n+\delta)k^\star$. D'ici, on peut isoler $(n+\delta) = \frac{sf(k^\star)}{k^\star}$ et remplacer en haut:

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)}{sf'(k^\star) - (n+\delta)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)}{sf'(k^\star) - \frac{sf(k^\star)}{k^\star}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)}{sf'(k^\star) - \frac{sf(k^\star)}{k^\star}}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)k^\star}{sf'(k^\star)k^\star - sf(k^\star)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = -\frac{f'(k^\star)k^\star}{sf'(k^\star)k^\star - sf(k^\star)}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = \frac{f'(k^\star)k^\star}{sf(k^\star) - sf'(k^\star)k^\star}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = \frac{f'(k^\star)k^\star}{sw}.$$

$$\frac{\mathrm{d}k^\star}{\mathrm{d}s} = \frac{f'(k^\star)k^\star}{sw} > 0.$$

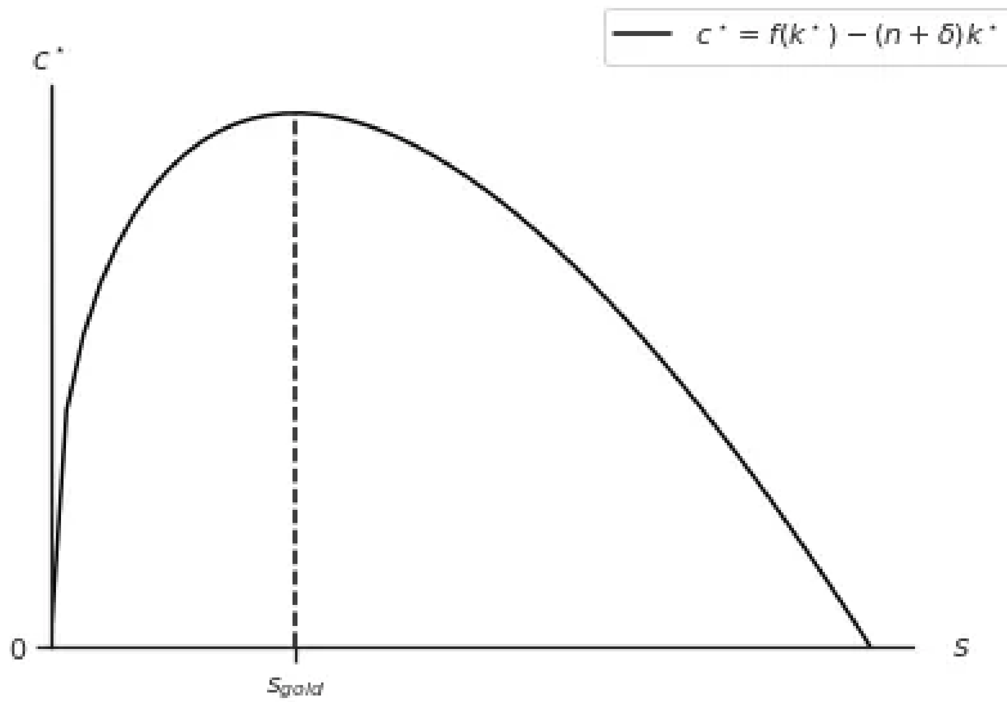
La consommation à l'état stationnaire était donnée par $c = f(k) - (n+\delta)k$ car $sf(k) = n+\delta k$. Cette fonction a une forme d'U inversé car $f'(k) - (n+\delta) > 0$ quand k est petit et < 0 quand k est grand. En plus, $f'' < 0$. Ainsi, suite à l'augmentation de s, si à l'origine la consommation était supérieure au niveau d'or ($c^{\text{gold}} \implies f'(k) = n + \delta$) $k^\star$ augmente. Pour tant, $f'(k)$ diminue et la consommation diminue. Ceci est une application de la règle d'or: si la consommation stationnaire excède la consommation d'or, une diminution du taux d'épargne permet d'augmenter la nouvelle consommation stationnaire.

Si, au contraire, la consommation stationnaire initiale était inférieure au niveau d'or, l'augmentation de s peut augmenter la nouvelle consommation stationnaire, ou la diminuer.

Il est important noter qu'à long terme, le capital par tête cesse d'augmenter et que le taux de croissance du capital sera toujours le même qu'avant le changement: $\frac{\dot{K}}{K} = n$.

Exercice $5^\star$

Existence de l'état stationnaire dans le modèle de Solow. Dans le cadre du modèle de Solow (sans croissance exogène), montrez que deux états stationnaires existent.



Solution

L'état stationnaire est définit comme la situation telle que $\dot{k} = 0$. Dans le modèle simple, $\dot{k} = sf(k) - (n+\delta)k$. Ainsi, l'état stationnaire implique $sf(k) = (n+\delta)k$. On voit que, si $k^\star = 0$, l'économie est stationnaire car $f(0) = 0$ (hypothèse d'essentialité). Cet état stationnaire n'est pas très intéressant, car sans capital la production est égale à 0, et donc aussi la consommation.

Un deuxième état stationnaire avec $k^\star > 0$ existe. La démonstration est plus simple si, en lieu de chercher à résoudre $\dot{k} = 0$, on cherche à résoudre $\frac{\dot{k}}{k} = 0$. Comme on veut que $k^\star > 0$, la division est possible. Pour tant, nous cherchons un $k^\star$ tel que $\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta) = 0$. En effet, si on dénote par

$$H(k) = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta),$$

on a:

$$\lim_{k\to 0} H(k) = +\infty.$$

Le limite $\lim_{k\to 0} \frac{sf(k)}{k} - (n+\delta)$ est indéterminé de type $\frac{0}{0}$. En appliquant la règle de l'Hôpital, le limite est équivalent à

$$\lim_{k\to 0} \frac{sf'(k)}{1} = +\infty$$

à cause des conditions d'Inada. Pour tant, quand k est petit, $H(k)$ est positive.

En revanche,

$$\lim_{k\to\infty} H(k) = -(n+\delta) < 0.$$

Enfin, la fonction $H(k)$ est continue. Pour tant, à conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, il existe **au moins** une valeur $k^\star > 0$ telle que $H(k^\star) = 0$.

Nous pouvons aussi montrer de manière simple qu'il n'existe *qu'une seule telle valeur*. Pour ce faire, il suffit de montrer que la fonction $H(k)$ est strictement décroissante. En effet,

$$\frac{\partial H(k)}{\partial k} = s\frac{\overbrace{f'(k)k - f(k)}^{=-w}}{k^2} < 0.$$

Exercice 6

Fonction de production alternative: Imaginez que la fonction de production est donnée par $Y = AK + BL$.

1. Est-ce que cette fonction de production est néoclassique?
2. Quelles sont les conditions des fonctions néoclassiques qui ne sont pas satisfaites?
3. Écrivez la fonction d'accumulation de capital pour le modèle de Solow.
4. Sous quelles conditions l'économie converge vers un état stationnaire?
5. Sous quelles conditions l'économie montre croissance endogène (sans fin)?

Solution

6.1. No, la fonction de production n'est pas néoclassique.

6.2. Les rendements sont constants pour chaque facteur:

- $F''_K F[K, L] = 0$
- $F''_L F[K, L] = 0$

Cela implique que les conditions d'Inada ne sont pas respectées, notamment le $\lim_{K\to\infty} F'_K = \lim_{L\to\infty} F'_L = 0$.

6.3. Le capital continue de s'accumuler comme toujours: $\dot{K} = sF(K, L) - \delta K$. Pour tant, si $k \equiv \frac{K}{L}$, nous avons que $\dot{k} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} = s(Ak + B) - \delta k - nk$. Ainsi, $\dot{k} = s(Ak + B) - (n + \delta)k$.

6.4. Le taux de croissance du capital par tête est: $\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta + \frac{SB}{k}$. Le niveau de capital par tête stationnaire est: $\dot{k} = 0 \implies k^\star = (-1)\frac{sB}{sA-\delta}$. On voit déjà que si $sA - \delta > 0$ alors $k^\star < 0$. En plus, pour converger vers l'état stationnaire, il est nécessaire que:

- Quand k est petit, le taux de croissance soit positive (typiquement grand).
- Quand $k \to \infty$, le taux de croissance soit négative (quand k est trop grand, l'économie perd du capital).

Avec $\frac{\dot{k}}{k} = sA - \delta + \frac{SB}{k}$, on a:

- $lim_{k\to 0}\dot{k} = +\infty$
- $lim_{k\to\infty}\dot{k} = sA - \delta$

Pour tant, pour avoir convergence il faut que $sA - \delta < 0$, autrement dit $sA < \delta$. En plus, avec cette condition, $k^\star > 0$.

6.5. Si l'économie a un taux de croissance toujours positive, elle a une croissance endogène. Dans ce cas-là, il faut vérifier sous quelles conditions k ne cesse jamais d'augmenter. Comme $\dot{k}k = sA - \delta + \frac{SB}{k}$, il suffit que $sA - \delta > 0$.