Modèle de Solow

Exercice 1

Supposez que la fonction de production est de type CES:

$$F(K, L) = (\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Déterminez la fonction de production équivalente en termes intensifs et calculez le salaire et le taux d'intérêt.

Solution

Si la fonction de production est

$$F(K, L) = (\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

en termes intensifs, nous aurons:

$$\begin{aligned}
&y \equiv \frac{Y}{L} = \frac{(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{L} \\
&y = L^{-1}(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\
&y = L^{\frac{-\rho}{\rho}}(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}} \\
&y = \left(L^{-\rho}\left[\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho\right]\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&y = (\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}$$

Le salaire et le taux d'intérêt peuvent être calculés en termes intensifs utilisant les définitions:

$r = f'(k) = \alpha k^{\rho-1}\left(\alpha k^\rho + (1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\rho}-1}$

$w = f(k) - f'(k)k = (\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} - \alpha k^{\rho-1}\left(\alpha k^\rho + (1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\rho}-1}$

$w = (\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}-1}\left(\alpha k^\rho + (1-\alpha) - \alpha k^\rho)\right) = (1-\alpha)(\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}-1}$

Exercice 2

Si le taux d'intérêt d'un pays qui se trouve à l'état stationnaire est inférieur à $n+\delta$, quelle politique pourriez-vous proposer pour augmenter la consommation du pays de manière à ce que toutes les générations y gagnent?

Solution

La règle d'or établie que le niveau de capital qui maximise la consommation stationnaire est: $f'(k^\star) = n + \delta$. Disions que le pays ait un niveau de capital stationnaire égal à $k^\dagger$. Si le taux d'intérêt du pays est inférieure à $n + \delta$, cela implique que $f'(k^\dagger) < n + \delta$ car le taux d'intérêt est $f'(k)$. Ainsi, cela implique que $k^\dagger > k^\star$ (pensez à la forme de la fonction $f'(k)$) et, donc, le pays a accumulé plus de capital que celui recommandé par la règle d'or. Pour tant, il serait nécessaire de réduire le niveau de capital de $k^\dagger$ à $k^\star$. Ceci est possible: la réduction du niveau de capital implique une augmentation de la consommation aujourd'hui, ce que la génération actuelle acceptera. En plus, comme l'économie convergera vers la règle d'or, toutes les autres générations y gagnent.

Exercice 3

On introduit un gouvernement dans le modèle de Solow sans croissance technologique. Ce gouvernement est simple: il impose une taxe forfaitaire égale à $\tau > 0$ à chaque ménage. Écrivez la fonction d'accumulation du capital et montrez que deux états stationnaires avec $k^\star > 0$ ($k^\star_{\text{low}}$ et $k^\star_{\text{high}}$) existent. En plus, montrez que $k^\star_{\text{low}}$ est non-stable (on n'y converge pas) et que, par contre, $k^\star_{\text{high}}$ est stable. Les ménages consomment toujours une fraction *fixe* du revenu disponible après impôts, c'est-à-dire, la consommation totale dans l'économie est $c = (1 - s)(y - l\tau)$.

Solution

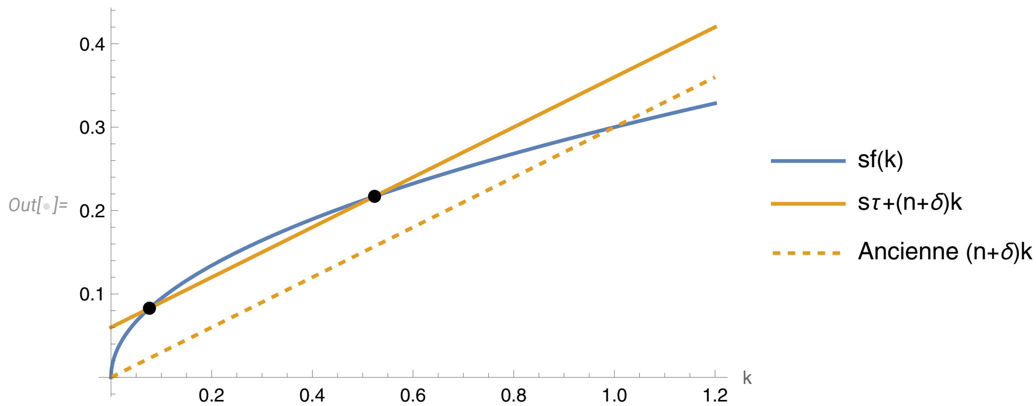
À niveau agregé, l'accumulation du capital est:

$$\begin{aligned} \dot{K} &= s(Y - L\tau) - \delta K \\ \dot{K} &= s(F(K, L) - L\tau) - \delta K \end{aligned}$$

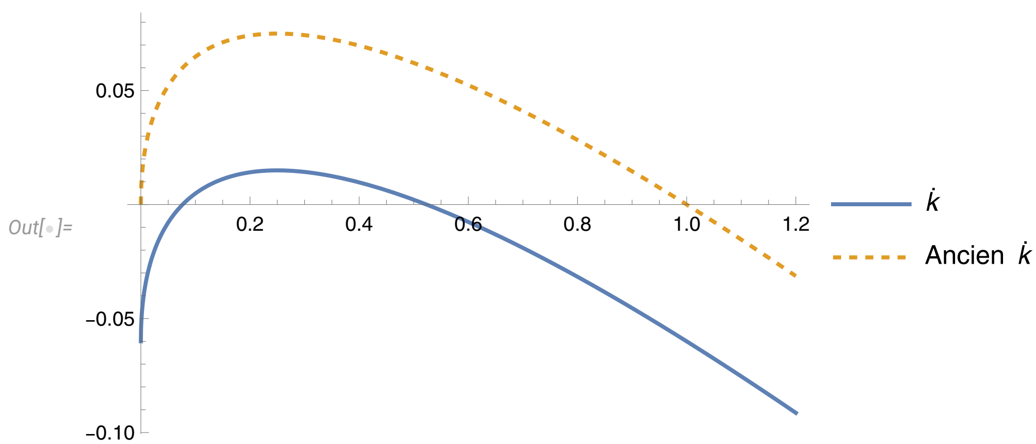
Ainsi, l'évolution du capital par habitant est:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{\dot{K}}{L} = \frac{\dot{K}L - \dot{L}K}{L^2} \\ \dot{k} &= \frac{s(F(K, L) - L\tau) - \delta K - \dot{L}K}{L^2} = s(f(k) - \tau) - (n + \delta)k \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer l'existence de deux états stationnaires avec un graphique. En effet, tout état stationnaire est la solution à: $\dot{k} = 0 \implies sf(k) = s\tau + (n + \delta)k$. Ainsi, la courbe $sf(k)$ reste inchangée par rapport à celle du modèle de basse. Par contre, l'ancienne droite $(n+\delta)k$ devient $s\tau + (+\delta)k$. Graphiquement, cela implique qu'elle est plus haute qu'avant car $s\tau > 0$.



Ensuite, nous pouvons discuter de la stabilité de $k^{\star}_{\text{low}}$ et de $k^{\star}_{\text{high}}$. Pour cela, il est plus simple de graphiquer la courbe $\dot{k} = sf(k) - s\tau - (n+\delta)k$.



Si l'économie se trouve à gauche de l'état stationnaire $k^{\star}_{\text{low}}$, on voit que $\dot{k} < 0$ et, pour tant, l'économie perd du capital. Anisi, elle s'éloigne de cet état stationnaire. Le contraire arrive à droite de l'état stationnaire: l'économie gagne du capital, et elle le fait chaque plus rapidement. Cet état stationnaire est donc non stable. Une manière encore plus directe de le voir consiste à utiliser le théorème de Hartman-Grobman: la valeur de la dérivée de $\dot{k}$ à $k^{\star}_{\text{low}}$

est clairement positive: la courbe est croissante là. Ainsi, selon ce théorème, ce point stationnaire n'est pas stable.

Le contraire arrive à $k^\star_{\text{high}}$: proche de ce point, la vitesse avec laquelle le capital s'accumule diminue. Par conséquent, $k^\star_{\text{high}}$ est stable.

Exercice 4

Imaginez qu'un planificateur capable d'établir le niveau d'épargne dans l'économie souhaite que celui ci soit égal au taux d'or (ce qui maximise la consommation stationnaire). Calculez ce taux d'épargne quand la fonction de production est Cobb-Douglas $f(k) = k^\alpha$.

Solution

À l'état stationnaire, l'économie est caractérisé par $\dot{k} = 0$. Ainsi, nous avons que:

$$\begin{aligned}&\dot{k} = sk^\alpha - (n+\delta)k = 0 \implies \\ &sk^{\star\alpha} = (n+\delta)k^\star\end{aligned}$$

La consommation (stationnaire ou non) est donnée par:

$$c = (1-s)f(k) = f(k) - sf(k)$$

Si l'on impose la stationnarité, la consommation stationnaire est:

$$c^\star = f(k^\star) - sf(k^\star) = f(k^\star) - (n+\delta)k^\star \qquad c^\star = k^{\star\alpha} - (n+\delta)k^\star$$

Si on maximise la consommation stationnaire, on obtient:

$$\frac{\partial c^\star}{\partial k^\star} = 0 \implies k_{\text{gold}} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ainsi, notre cible est de choisir le taux d'épargne s de manière à que le niveau de capital à l'état stationnaire coincide avec k_{gold}. Le niveau de capital stationnaire vers lequel l'économie converge est:

$$\begin{aligned}&\dot{k} = 0 \implies sk^\alpha = (n+\delta)k \implies \\ &k^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\end{aligned}$$

Nous voulons que $k^\star = k_{\text{gold}}$, et donc:

$$
\begin{aligned}
&k^\star = k_{\text{gold}} \\
&\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&s_{\text{gold}} = \alpha
\end{aligned}
$$

Ainsi, il faut que le planificateur choisisse $s = \alpha$.

Une autre manière alternative de résoudre consiste à écrire le niveau de capital comme une fonction de s et ensuite maximiser la consommation stationnaire. En effet, nous avons déjà que le capital stationnaire est:

$$k^\star = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ainsi, la consommation stationnaire est donnée par:

$$
\begin{aligned}
c &= f(k^\star) - (n+\delta)k^\star = k^{\star\alpha} - (n+\delta)k^\star \\
c &= \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (n+\delta)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

Si alors on maximise cette consommation qui dépend seulement de s on obtient:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial c}{\partial s} = 0 \implies \\
&\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = (n+\delta)\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
&\alpha\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1} = (n+\delta)\left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
&\alpha s^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}(n+\delta)^{1-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = s^{\frac{1}{1-\alpha}-1}(n+\delta)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&\alpha s^{-1} = 1 \\
&s_{\text{gold}} = \alpha
\end{aligned}
$$